Épreuve disciplinaire

Étude de protocoles de traçage de contacts numériques

Éléments de correction

Dans le domaine de la santé, le *traçage de contacts* (dénommé TC par la suite) est un processus permettant d'identifier les individus qui ont pu être en contact avec une personne infectée. L'objectif du TC au cours d'une épidémie est de réussir à identifier rapidement les personnes ayant pu être contaminées afin de les tester, les traiter si besoin et/ou les isoler.

Nous nous intéressons à deux protocoles de TC automatisés (les protocoles HaMagen et ROBERT) qui ont été mis en œuvre durant la pandémie de la Covid19 dans différents pays. Le but est d'en proposer une implémentation et d'en discuter les propriétés en terme de sécurité.

Par la suite, il sera supposé que les individus disposent tous d'un téléphone portable, et qu'il y a une infrastructure centralisatrice (par exemple un cloud ou un serveur), appelée IC par la suite, qui est sous le contrôle d'une entité bien identifiée (par exemple le ministère de la santé).

Toutes les fonctions demandées par la suite devront être rédigées en langage Python.

Le problème est constitué de 6 exercices qui peuvent être traités de manière indépendante, en admettant le résultat des questions précédentes si nécessaire. Certains concepts sont utilisés tout au long du problème, ils sont présentés dans la première partie du sujet.

Les réponses aux questions devront être précises et rédigées avec soin.

Concepts et notations nécessaires

Les protocoles de traçage de contacts reposent sur des concepts décrits par la suite. Nous donnons ici la manière dont les structures de données, associées à ces concepts, sont représentées en Python.

Point de localisation : la localisation des individus est réduite à un point, représenté en Python par un couple de réels `(lat, long)` désignant la latitude et la longitude de l'individu sur le globe terrestre.

Temps : le protocole nécessite de mémoriser la position passée des individus sur leur téléphone avec une périodicité P exprimée en minutes. Pour plus de simplicité, on se donne une date origine D_0 commune à tous les individus et on compte les dates de mémorisation D_e à partir de cette date d'origine, de la manière suivante :

$$D_e = D_0 + e \times P$$

où l'entier naturel e (dénommé *époque* par la suite) désigne le nombre d'intervalles écoulés depuis D_0.

Dans la suite, nous supposerons que la périodicité est de 15 minutes ($P = 15$).

Trace : le téléphone de chaque utilisateur contient un dictionnaire `trace` dont la clé est une époque (un entier naturel) et la valeur est un point de localisation (un couple de réels `(lat, long)`) désignant la position de l'individu à l'époque considérée. Pour des raisons de simplicité, on ne considèrera ici que des latitudes Nord et longitudes Est.

Ainsi le dictionnaire `{4:(10.6,12.3), 5:(7.2,1.0)}` signifie qu'à l'époque 4, l'individu était localisé à la latitude $10°6'N$ et la longitude $12°3'E$ tandis qu'à l'époque 5, il était situé à la latitude $7°2'N$ et la longitude $1°0'E$.

Durée de contagiosité : on fait l'hypothèse qu'il existe une durée maximale pendant laquelle les personnes sont contagieuses. Cette durée est notée *Cont* et est exprimée en nombre de jours.

Traces à risques : l'infrastructure centralisatrice maintient de son côté une liste `listeAR` mémorisant les traces considérées à risque. Une trace à risque correspond à une trace d'une personne qui a été testée positive. La structure de données `listeAR` est donc une liste de dictionnaires correspondant aux traces de mobilité des personnes ayant été testées positivement à la Covid19. La durée des traces correspond à la durée où les personnes étaient potentiellement contagieuses. Cette liste peut ensuite être téléchargée librement par n'importe quel individu. Les personnes sont identifiées par leur position (arbitraire) dans la liste.

Ainsi la liste `[{4:(10.6,12.3), 5:(7.2,1.0)}, {1440:(243.0,12.1)}]` indique les traces de deux individus avec leurs positions aux époques mémorisées par le système de traçage et pour lesquelles ils sont considérés à risque. Les données du premier individu concernent les époques 4 et 5, les données du 2e individu ne concernent que l'époque 1440.

Exercice 1 : Protocole *HaMagen*

Le protocole de traçage de contacts *HaMagen* repose uniquement sur les notions présentées juste avant dans la partie introductive. Dans cette partie nous nous intéressons à son implémentation en Python dans une version simplifiée.

Question 1.1

Avec les structures de donnée Python choisies, est-il possible de stocker la position de l'individu aux époques 4 et 6, sans connaitre sa position à l'époque 5 ? Justifier brièvement.

Éléments de correction :

Oui car il n'y a pas de contraintes sur les clés (tant qu'elles respectent le bon type). Par exemple, l'utilisateur peut avoir comme trace : {`4:(10.6,12.3), 6:(7.2,1.0)`}

Principe du protocole *HaMagen*.

Le fonctionnement du protocole *HaMagen* repose sur le principe suivant : la trace d'un individu est stockée sur son téléphone portable. Si jamais l'utilisateur est testé positif à la Covid19 à une époque e, alors les 14 derniers jours de sa trace sont téléversés sur l'infrastructure centralisatrice ($Cont = 14$). La liste des traces à risque, `listeAR`, est mise à jour en ajoutant cette nouvelle trace à la fin de `listeAR`.

Indépendamment, toute personne peut télécharger régulièrement la liste des traces à risque, `listeAR`, depuis l'infrastructure centralisatrice sur son téléphone. Ceci lui permet de comparer les traces à risque téléchargées avec sa propre trace stockée sur son téléphone. Si jamais certains points de localisation de sa trace sont proches d'une ou plusieurs traces à risque, alors la personne est identifiée comme cas contact.

Question 1.2

Écrire une fonction python `debutAR` qui, étant donnée une époque `e` à laquelle un individu est testé positif, renvoie l'époque correspondant au début de la période à risque, c'est-à-dire l'entier naturel désignant l'époque 14 jours avant `e`.

Remarque : On rappelle que la période d'enregistrement des localisations est supposée de 15 minutes et que la valeur de l'époque retournée doit être supérieure ou égale à 0.

Éléments de correction :

```
def debutAR(e):
    return max(0, e-14*24*60//15)
```

Question 1.3

En déduire une fonction python `extraitTraceAR` qui, étant données la trace `tr` d'un individu et une époque `e` à laquelle il est détecté positif, renvoie un dictionnaire construit à partir de `tr` contenant uniquement les époques et localisations considérées comme à risque.

Éléments de correction :

```
def extraitTraceAR(tr, e):
    trAR=dict()
    for i in range(debutAR(e), e+1):
        if i in tr:
            trAR[i]=tr[i]
    return trAR
```

ou, en utilisant un schéma de compréhension :

```
def extraitTraceAR(tr, e):
    return {i:tr[i] for i in range(debutAR(e), e+1) if i in tr}
```

Le parcours dans l'autre sens est aussi possible :

```
def extraitTraceAR(tr, e):
    return {i:tr[i] for i in tr if i>=debutAR(e) and i<=e}
```

Question 1.4

Montrer que la taille du dictionnaire construit avec la fonction `extraitTraceAR` est bornée par une constante qui ne dépend que de P et $Cont$. Dans quel cas cette borne est-elle atteinte ?

Éléments de correction :

Il y a autant d'éléments dans le dictionnaire que d'époques considérées à risque, c'est-à-dire dans le pire cas $Cont \times 24 \times 60/P$ (avec $Cont$ exprimé en jours et P en minutes). Cette borne est atteinte si le téléphone de la personne a été allumé tout le temps pendant les $Cont$ jours précédant son test positif, impliquant une mémorisation, sur le téléphone, de toutes les époques de cette période.

Implémentation du protocole $HaMagen$.

Chaque personne peut donc à tout moment vérifier si elle est devenue une personne à risque via l'algorithme 1 décrit ci-dessous.

Algorithme 1 : Protocole HaMagen simplifié

Entrée : dContact : réel exprimant la distance, en mètre, en dessous de laquelle deux personnes sont considérées être en contact

Structure de données : maTrace : dictionnaire (au départ vide) contenant la trace de l'utilisateur

```
1  maTrace = dict() ;
2  aRisque = False ;
3  Tant que not aRisque faire
4  |   maTrace[epoque()] = posGPS() ;
5  |   listeAR = recupTraces() ;
6  |   Pour tr in listeAR faire
7  |   |   Si aCroise(tr, maTrace, dContact) alors
8  |   |   |   aRisque = True;
9  |   |   Fin
10 |   Fin
11 |   attendre 15 minutes ;
12 Fin
13 print('Vous venez d'être identifié comme cas contact.') ;
```

Dans cet algorithme, on suppose implémentées les fonctions `epoque()`, `posGPS()` et `recupTraces()` qui permettent respectivement d'obtenir l'époque courante, la position courante du téléphone portable ainsi que la liste, récupérée depuis l'infrastructure centrale, contenant les traces considérées à risque.

La dernière fonction, `aCroise(t1, t2, dContact)`, reste à implémenter. Elle permet de savoir si l'individu ayant produit la trace `t1` a croisé l'individu ayant produit la trace `t2` à une distance inférieure ou égale à `dContact` à au moins une époque par le passé.

Question 1.5

Soient deux points $p_1 = (\text{lat}_1, \text{long}_1)$ et $p_2 = (\text{lat}_2, \text{long}_2)$ sur la Terre, tous deux localisés par rapport au Nord et à l'Est, avec des angles compris entre 0° et 90°. La distance entre ces deux points peut se calculer en première approximation à l'aide du Théorème de Pythagore (pour des points assez proches) par :

$$d = k \times \sqrt{x^2 + y^2}$$

avec $x = \text{lat}_1 - \text{lat}_2$, $y = (\text{long}_1 - \text{long}_2) \times \cos(\frac{\text{lat}_1 + \text{lat}_2}{2})$ et $k = 111\,120$ un facteur multiplicatif permettant d'exprimer le résultat en mètres.

Écrire une fonction Python `proximite` qui, étant donnés deux points `p1` et `p2` ainsi qu'une distance `dContact` exprimée en mètres, renvoie `True` si les points sont à une distance inférieure ou égale à `dContact` et `False` sinon.

Éléments de correction :

```
import math

def proximite(p1, p2, dContact):
    (lat1, long1) = p1
    (lat2, long2) = p2
    x=lat1-lat2
    y=(long1-long2)*math.cos((lat1+lat2)/2)
    d = 111120 * math.sqrt(x**2+y**2)

    return d <= dContact
```

Question 1.6

En déduire l'écriture d'une fonction Python `aCroise(t1, t2, dContact)` qui, étant données deux traces `t1` et `t2` ainsi qu'une distance `dContact` exprimée en mètres, renvoie `True` s'il existe au moins une époque durant laquelle un point p_1 de `t1` et un point $p2$ de `t2` sont à une distance inférieure à la distance `dContact`. Elle renvoie `False` sinon.

Éléments de correction :

```
def aCroise(tr1, tr2, dContact):

    for i in tr1:
        p1=tr1[i]
        if i in tr2:
            p2 = tr2[i]
            if proximite(p1, p2, dContact):
                return True

    return False
```

Question 1.7

Quels sont les paramètres nécessaires pour exprimer la complexité de la fonction `aCroise` ? Quelle est la complexité de la fonction dans le pire des cas ?

Éléments de correction :

La complexité dépend de l'implémentation choisie.
Dans le cas de la correction proposée dans les fonctions précédentes, il s'agit de tester pour toutes les époques de t1, si cette époque existe dans t2 et, si oui, est-ce que les deux positions sont proches. La complexité serait donc de $O(|t1|)$ si le test d'existence de clé et le calcul de proximité sont en $O(1)$ (ce qui est le cas si un dictionnaire est utilisé, ce serait en $O(n)$ dans le cas d'une liste).

Exercice 2 : Requêtes SQL : stockage des données sur l'infrastructure centralisatrice

La fonction `recupTraces()` utilisée dans l'algorithme 1 effectue un appel à l'infrastructure centralisatrice (IC) pour récupérer les traces de tous les utilisateurs positifs à la Covid19 qui ont accepté de téléverser leurs données sur le serveur. Nous faisons l'hypothèse que ces informations sont stockées sur l'IC dans une base de données relationnelle, dont le schéma est le suivant (clés primaires soulignées, clés étrangères indiquées par une contrainte REFERENCES) :

- `users (id, numTel)`
- `traces (id, epoque, latitude, longitude)`
- `traces.id REFERENCES users.id`

La base de données est donc composée de deux tables : `users` qui fait le lien entre un numéro de téléphone et un identifiant arbitraire généré par l'IC (`id`), et `traces` qui contient les informations de position GPS pour un `id` spécifique et une `epoque` donnée. Le numéro de téléphone ne sera pas transmis à d'autres utilisateurs de l'application et reste simplement sur l'IC. Il sert à vérifier, au moment du téléversement, que toutes les traces d'un même utilisateur sont bien affectées au bon `id`.

L'algorithme de téléversement est donc le suivant : un utilisateur détecté positif à la Covid19 télécharge ses positions GPS une par une, en associant son numéro de téléphone. Lorsque le serveur reçoit une position, il vérifie si le numéro de téléphone existe déjà. S'il n'existe pas, il génère un nouvel identifiant `id`, insère le couple `(id, numTel)` dans la table `users`, puis insère la position dans la table `traces` en utilisant ce nouvel identifiant. Si le numéro de téléphone existe déjà, l'IC retouve l'id correspondant, n'insère rien dans la table `users`, et insère la position dans la table `traces` avec le bon identifiant.

Dans les questions qui suivent, on ne s'intéresse pas à la manière dont les traces sont échangées entre le téléphone et l'IC, mais simplement à la manipulation de ces traces sur le serveur.

Question 2.1

Donner la requête SQL qui retourne l'`id` correspondant au numéro de téléphone `0123456789`, si celui-ci est présent dans la base.

Éléments de correction :

SELECT u.id FROM users u WHERE u.numTel='0123456789'

Question 2.2

Donner la requête SQL qui retourne combien d'utilisateurs (identifiés de manière unique par leur numéro de téléphone) sont présents dans la base.

Éléments de correction :

SELECT COUNT(distinct u.numTel) FROM users u
Si on fait l'hypothèse que la base de données respecte bien la contrainte d'unicité du numTel, compte tenu de l'algo donné précédemment, alors on peut aussi faire SELECT COUNT(*) FROM users

Question 2.3

Donner la requête SQL qui retourne l'ensemble des positions (latitude et longitude) de l'utilisateur correspondant au numéro de téléphone `0123456789`.

Éléments de correction :

Deux possibilités :
SELECT t.latitude, t.longitude FROM traces t JOIN users u ON u.id = t.id WHERE u.numTel = '0123456789'
ou
SELECT t.latitude, t.longitude FROM traces t, users u WHERE u.numTel = '0123456789' AND u.id = t.id

Question 2.4

Donner la requête SQL qui retourne le nombre de positions enregistrées sur le serveur pour chaque utilisateur, identifié de manière unique par son numéro de téléphone.

Éléments de correction :

Deux possibilités : SELECT u.numTel, COUNT(*) FROM traces t JOIN users u ON u.id = t.id GROUP BY u.numTel ou SELECT u.numTel, COUNT(*) FROM traces t, users u WHERE u.id = t.id GROUP BY u.numTel

Question 2.5

Donner la requête SQL qui retourne combien d'utilisateurs ont laissé plus de 1000 enregistrements de position sur le serveur.

Éléments de correction :

SELECT COUNT(*) FROM (SELECT t.id FROM traces t GROUP BY t.id HAVING COUNT(*) > 1000) AS T

Question 2.6

On suppose la base de données vide, et qu'un `commit` est exécuté après chaque insertion. L'IC exécute les instructions suivantes :

1. INSERT INTO traces VALUES(1, 0, 1.52, 1.55)
2. INSERT INTO traces VALUES(1, 1, 1.53, 1.55)
3. INSERT INTO users VALUES(1, 0123456789)

Indiquer le contenu de la base de données une fois ces trois instructions exécutées. Expliquer.

Éléments de correction :

Il n'y a que (1, 0123456789) dans la table users car les autres nuplets n'ont pas pu être insérés pour cause de clé étrangère non présente dans la table users au moment de la tentative d'insertion. La réponse 'pas d'insertion suite à la troisième requête' a aussi été acceptée.

Question 2.7

On suppose la base de données vide, et qu'un `commit` est exécuté après chaque insertion. L'IC exécute les instructions suivantes :

1. INSERT INTO users VALUES(1, 0123456789)
2. INSERT INTO users VALUES(2, 0987654321)
3. INSERT INTO traces VALUES(1, 0, 1.52, 1.55)
4. INSERT INTO traces VALUES(1, 1, 1.53, 1.55)
5. INSERT INTO traces VALUES(2, 0, 1.52, 1.55)
6. INSERT INTO traces VALUES(2, 0, 1.53, 1.55)

Indiquer le contenu de la base de données une fois ces six instructions exécutées. Expliquer.

Éléments de correction :

Tout est dans la base sauf la dernière ligne pour cause de violation de clé primaire : la clé (2, 0) est déjà présente dans la table traces. La réponse 'aucune insertion' a aussi été acceptée.

Exercice 3 : Sécurité et vie privée : confidentialité des données sur le serveur

La requête proposée à la question 2.3 montre que l'administrateur de la base de données est capable de retrouver toutes les traces de tous les individus dont il connaît le numéro de téléphone. On cherche donc à modifier l'infrastructure pour résoudre ce problème en chiffrant l'information sensible qu'est le numéro de téléphone.

Question 3.1

Est-ce que chiffrer les communications entre les individus et l'IC, comme le fait le protocole `HTTPS` pour le Web, permettrait de résoudre le problème mentionné ci-dessus ? Justifier.

Éléments de correction :

Non, puisque chiffrer les communications, comme le fait HTTPS, ne sécurise que la transmission des données entre le téléphone de l'utilisateur et l'IC. Les données arrivent "en clair" sur l'IC. Les attaques discutées plus haut restent donc possibles, malgré un chiffrement des communications.

Chiffrement

On décide désormais de ne pas stocker le numéro de téléphone `numTel`, mais plutôt sa valeur chiffrée $E($`numTel`$)$, en utilisant un algorithme de chiffrement symétrique, paramétré par une clé de chiffrement KS, que l'on supposera inaccessible à quiconque, y compris les administrateurs de l'infrastructure centralisée. Ainsi un ajout dans la base de données se fera en rajoutant un appel à une fonction E de chiffrement avec la commande `INSERT INTO users VALUES(1, E('0123456789'))`.

Pour vérifier si un numéro de téléphone est déjà présent dans la base, l'IC cherche si la valeur chiffrée de ce numéro de téléphone est présent dans la table `users`.

On suppose par ailleurs que la fonction de chiffrement E est une fonction qui peut être appelée depuis n'importe quelle requête SQL, sans avoir besoin de connaître la clé KS.

Question 3.2

On considère que E est à valeurs dans un ensemble fini. Est-il possible d'avoir la propriété suivante, correspondant à une *collision* : il existe X, Y deux numéros de téléphone tels que $E(X) = E(Y)$ et $X \neq Y$ si E est à valeurs dans un ensemble fini de taille 2^{16} ? Que se passerait-il si E était à valeurs dans un ensemble fini de taille 2^{64} ? On ne demande pas de calculer la probabilité de collision.

Éléments de correction :

Oui cela est possible. Si E est à valeur dans un ensemble beaucoup plus petit que l'ensemble des numéros de téléphone (de l'ordre de grandeur de 10^{10} en France) alors on aura potentiellement des collisions (c'est le cas avec 2^{16} qui vaut 65536). Dans ce cas, c'est tout à fait possible (et probable). D'une manière générale, comme E est à valeurs dans un ensemble fini, il est *possible* d'avoir des collisions, même si cette probabilité peut être rendue très petite (par exemple dans le cas d'un ensemble de taille $2^{64} >> 10^{10}$).

Question 3.3

Est-il possible pour l'administrateur de la base de données de retrouver les traces d'un individu dont il connait le numéro de téléphone, maintenant que les numéros de téléphone sont chiffrés dans la base ? Justifier.

Éléments de correction :

Oui, il suffit de poser la même requête que précédemment (Question 2.3), en appliquant au préalable la fonction de chiffrement : `SELECT t.latitude, t.longitude FROM traces t JOIN users u ON u.id = t.id WHERE u.numTel = E('0123456789')`. On pourrait aussi argumenter qu'il pourrait intercepter toutes les données entrant dans le SGBD et les copier ailleurs, avant d'exécuter la requête d'insertion utilisant la fonction de chiffrement.
L'écriture de la requête n'était pas attendue.

Sécurité du protocole $HaMagen$.

Tel qu'il est défini dans l'algorithme 1, le protocole présente la vulnérabilité suivante : les points de localisation correspondant à un individu peuvent tous être liés à la même trace (celle de l'individu). Ainsi, si on est capable de retrouver la position d'un individu à un moment donné, on sera capable de connaitre l'ensemble de sa trace (sur les $Cont = 14$ derniers jours).

Principe de l'attaque du protocole $HaMagen$.

Mme X (une espionne par exemple) achète un téléphone et installe l'application. Elle allume ensuite le GPS et l'application pendant k époques T_{on} à T_{on+k-1}, durant lesquelles elle se retrouve seule à proximité d'un individu cible (Mr Y) qu'elle souhaite pister. Elle éteint ensuite son GPS et son téléphone, pour ne le rallumer que lorsqu'elle est sûre d'être seule, afin de récupérer l'ensemble des traces à risque depuis le serveur. Si à un moment donné, dans les traces récupérées sur son téléphone, elle retrouve une trace qui a croisé la sienne, alors elle peut être sûre de deux choses : 1) Mr Y a été testé positif à la Covid19 et a envoyé sa trace à l'IC, et 2) tous les points de la trace qu'elle a croisés sont les points de Mr Y. Mme X sera donc en mesure de retracer les déplacements des 14 derniers jours de Mr Y.

Question 3.4

En vous inspirant de l'algorithme 1, proposer un algorithme renvoyant la trace de l'individu ciblé en réalisant l'attaque décrite ci-dessus.

Éléments de correction :

La question n'était pas difficile car il s'agissait de modifier l'algorithme 1 en introduisant une structure de donnée supplémentaire pour récupérer la trace de Mr Y.

Entrée : dContact : réel exprimant la distance, en mètre, en dessous de laquelle deux personnes sont considérées être en contact
Structure de données : maTrace : dictionnaire (au départ vide) contenant la trace de l'utilisateur
Sortie : trMrY : la trace de Mr Y

```
1  maTrace = dict()
2  aRisque = False
3  trMrY = dict()
4  Tant que not aRisque faire
5      maTrace[epoque()] = posGPS()
6      listeAR = recupTraces()
7      Pour tr in listeAR faire
8          Si aCroise(tr, maTrace, dContact) alors
9              aRisque = True
10             trMrY = tr
11         Fin
12     Fin
13     attendre 15 minutes
14 Fin
15 return trMrY
```

Exercice 4 : Détection de "hot spots"

L'autorité gérant l'IC possède de nombreuses données sur les personnes ayant été testées positives à la Covid19 et s'étant déclarées sur l'application $HaMagen$.

L'IC souhaite détecter des *hot spots*, c'est-à-dire des endroits où de nombreuses personnes testées positives à la Covid19 se sont trouvées. On fait l'hypothèse que si une trace est présente dans la base de données de l'IC, alors la personne était positive à la Covid19, et donc que l'IC ne contient que des traces de personnes positives à la Covid19 (il n'y a donc pas de faux positifs).

Remarque : Dans toute ce qui suit, vous pouvez, si besoin, vous servir des fonctions proposées dans l'exercice 1.

Question 4.1

Ecrire une fonction Python `estHotspotEpoque(p, listeAR, k, dContact, e)` qui, étant donnés un point de localisation `p`, une liste de dictionnaires `listeAR` contenant les traces à risques, un entier `k`, un reél `dContact` et un entier `e`, renvoie `True` si au moins `k` individus présents dans la liste `listeAR` sont présents à l'époque `e` à une distance inférieure ou égale à `dContact` du point `p`.

Éléments de correction :

```
def estHotspotEpoque(p, listeAR, k, dContact, e):

    nbIndiv = 0

    for tr in listeAR:
        if e in tr and proximite(tr[e], p, dContact):
                nbIndiv +=1

    return nbIndiv >= k
```

Question 4.2

Donner la complexité de votre fonction dans le pire des cas. Justifier.

Éléments de correction :

C'est linéaire en le nombre d'éléments de `listeAR` si on considère le test d'appartenance de clé en $O(1)$ (le test de proximité étant constant).

Question 4.3

En déduire une fonction Python `estHotspot(p, listeAR, k, dContact)` qui renvoie `True` si le point `p` de localisation est un hotspot, c'est-à-dire si au moins `k` individus de la liste `listeAR` sont présents à une même époque, à une distance inférieure ou égale à `dContact` de `p`.

Éléments de correction :

```
def estHotspot(p, listeAR, k, dContact):

    for tr in listeAR:
        for e in tr:
            if proximite(p,tr[e],dContact): # e est une epoque candidate
                if estHotspotEpoque(p, listeAR, k, dContact, e):
                    return True

    return False
```

Question 4.4

Donner la complexité de cette fonction dans le pire des cas. Justifier.

Éléments de correction :

C'est quadratique en `listeAR` car le second "for" est borné (chaque élément de la liste a une taille bornée par une constante, cf question 1.4).

On s'interroge maintenant sur les points de localisation à tester avec la fonction `estHotspot`. On pourrait par exemple tester toutes les positions de France avec une certaine granularité mais ce serait peu efficace.

Question 4.5

Dans un premier temps, on se propose d'utiliser la fonction `mystere(listeAR, k, dContact)` suivante, dont le code est donné en Python :

```
def mystere(listeAR, k, dContact):

    IHP = []

    for tr in listeAR:
        for e in tr:
            p = tr[e] # prochain point a tester
            if estHotspot(p, listeAR, k, dContact):
                IHP.append(p)

    return IHP
```

Expliquer ce que fait cette fonction et ce qu'elle renvoie.

Éléments de correction :

La fonction `mystere(listeAR, k, dContact)` renvoie une liste contenant les positions présentes dans `listeAR` qui sont des hotspots.

Question 4.6

Quelle est la complexité de la fonction `mystere(listeAR, k, dContact)` dans le pire des cas ?

Éléments de correction :

La complexité est $O(|listeAR|^3)$.

On se propose d'éviter, par la suite, de considérer comme hotspots des points qui sont trop proches les uns des autres.

Question 4.7

Proposer une amélioration de la fonction précédente en écrivant une fonction `listHotspotsDistincts(listeAR, k, dContact)` qui renvoie une liste contenant les points de localisation de `listeAR` qui sont des hotspots mais pour lesquels aucun autre point de la liste renvoyée n'est à une distance inférieure ou égale à `dContact`.

Éléments de correction :

```
def listHotspotDistinct(listeAR, k, dContact):

    listHP : []

    for tr in listeAR:
        for e in tr:
            p = tr[e] # prochain point a tester

            dejaHP = False
            for pAR in listHP:
                if proximite(p,pAR,dContact): # il existe deja un hotspot proche
                    dejaHP = True

            if not dejaHP and estHotspot(p, listeAR, k, dContact):
                listHP.append(p)

    return listHP
```

Question 4.8

Compléter les blocs ***(1)*** et ***(2)*** de la fonction Python `recupTraces()` donnée ci-dessous. Cette fonction retourne une liste `listeAR` à partir des données stockées dans la base de données de l'IC. Le bloc ***(1)*** représente une requête SQL, et le bloc ***(2)*** peut contenir plusieurs instructions Python.

Note : étant donnée une requête SQL de la forme `SELECT` A_0`,` A_1`, ...`A_N `FROM T WHERE ...`, l'instruction `ligne[i]` permet d'accéder à la valeur de l'attribut A_i de la clause `SELECT` si on l'utilise dans une boucle `for ligne in liste:`.

```
import sqlite3
def recupTraces():

  conn = sqlite3.connect('baseDonnees.db')
  cur = conn.cursor()
  cur.execute(***(1)***)
  liste = cur.fetchall()
  ***(2)***
  conn.close()
  return listeAR
```

Éléments de correction :

Première proposition avec la requête : `SELECT t.id, t.epoque, t.latitude, t.longitude FROM traces t ORDER BY t.id`. On n'est pas obligé d'utiliser ORDER BY t.id, mais on le fait pour simplifier la suite du code (constitution d'une trace par identifiant).

```
import sqlite3
def recupTraces():

        conn = sqlite3.connect('baseDonnees.db')
        cur = conn.cursor()
        cur.execute('SELECT t.id, t.epoque, t.latitude, t.longitude FROM traces t ORDER BY t.i
        liste = cur.fetchall()

        currentId = -1
        listeAR = []
        tr = {}
        for ligne in liste:
                if currentId != ligne[0]:
                        currentId = ligne[0]
                        tr = {}
                        listeAR.append(tr)
                tr[ligne[1]] = (ligne[2], ligne[3])

        conn.close()
        return listeAR
```

Deuxième proposition possible si la requête proposée n'a pas regroupé les traces par id.

```
import sqlite3
def recupTraces():

        conn = sqlite3.connect('baseDonnees.db')
        cur = conn.cursor()
        cur.execute('SELECT t.id, t.epoque, t.latitude, t.longitude FROM traces t')
        liste = cur.fetchall()

        dTR=dict() # dictionnaire permettant de rassembler les traces pour chaque id
        for ligne in liste:
                tid=ligne[0]
                if tid not in dTR:
                        dTR[tid] = dict()
                dTR[tid][ligne[1]] = (ligne[2], ligne[3])

        listeAR = []
        for tid in dTR:
                listeAR.append(dTR[tid])

        conn.close()
        return listeAR
```

Exercice 5 : Algorithmique de graphes

On souhaite maintenant étudier la structure relationnelle établie entre les personnes contaminées afin d'identifier celles qui sont les plus centrales. Pour cela, on construit un graphe social non orienté et non pondéré `GraphCovid` dont les sommets sont des personnes (identifiées par un entier) et dont les arêtes relient deux personnes qui ont été en contact à une même époque.

On supposera par la suite que le graphe est décrit par une liste d'adjacence, implémentée en Python par un dictionnaire dont les clés sont les identifiants des personnes et les valeurs sont les listes de sommets voisins dans le graphe. On supposera par ailleurs le graphe non vide et connexe.

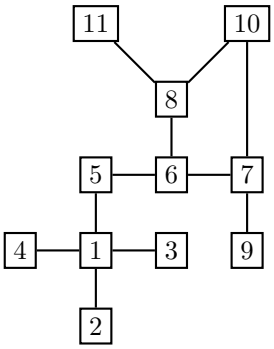
On considérera par la suite le graphe `GraphCovid` décrit par la structure suivante :

```
GraphCovid = {
        1: [2, 3, 4, 5],
        2: [1],
        3: [1],
        4: [1],
        5: [1, 6],
        6: [5, 7, 8],
        7: [6, 9, 10],
        8: [6, 10, 11],
        9: [7],
        10: [7,8],
        11: [8]
}
```

Question 5.1

Donner une représentation graphique de la structure `GraphCovid`.

Éléments de correction :



Pour identifier les personnes les plus centrales dans un graphe social $G = (V, E)$, plusieurs métriques peuvent être utilisées comme :

Degré : le degré d'un sommet s correspond à son nombre de voisins dans le graphe.

Centralité de proximité : la centralité de proximité d'un sommet s est définie par l'inverse de la somme des distances de ce sommet vers tous les autres sommets du graphe :

$$C_{prox}(s) = \frac{1}{\sum_{x \in V \setminus \{s\}} dist(s, x)}$$

où $dist(s, x)$ correspond à la longueur d'un plus court chemin entre s et x dans G.

Question 5.2

Sur le graphe `GraphCovid` précédent, quel sommet a le plus fort degré et quelle est sa valeur ? Quel sommet a la plus forte centralité de proximité et quelle est sa valeur parmi les sommets 1, 5 et 6 ?

Éléments de correction :

Centralité de degré : sommet 1 car il est de degré 4.

Centralité de proximité : sommet 6 car il est de centralité $\frac{1}{20}$. (les sommets 1 et 5 ont respectivement des centralités de $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{21}$).

Question 5.3

Écrire une fonction Python `plusFortDegre(G)` qui, étant donné un graphe `G`, renvoie l'identifiant du sommet de plus fort degré.

Éléments de correction :

```
def plusFortDegre(G):

    s=-1
    d=-1

    for v in G:
        if len(G[v]) > d:
            s=v
            d=len(G[v])
    return s
```

On souhaite maintenant déterminer un sommet de plus forte centralité de proximité. Pour cela nous allons nous appuyer sur l'algorithme de parcours en largeur d'un graphe, qui est donné ci-dessous :

Algorithme 2 : Parcours en largeur d'un graphe

Entrée : G, un graphe
Entrée : s, identifiant du sommet de départ

```
1  F = FileVide();
2  Enfiler(F,s);
3  Marquer(s);
4  Tant que F non vide faire
5  |  x=Defiler(F);
6  |  Pour y voisin de x dans G faire
7  |  |  Si y non marqué alors
8  |  |  |  Enfiler(F,y);
9  |  |  |  Marquer(y);
10 |  |  Fin
11 |  Fin
12 Fin
```

Question 5.4

Pourquoi l'algorithme de parcours en largeur est utile pour calculer la centralité de proximité d'un sommet ?

Éléments de correction :

Parce que le parcours du graphe généré par l'algorithme explore les sommets par distance croissante depuis la racine. Il permet entre autre de déterminer les plus courts chemins depuis la racine.

Question 5.5

En adaptant l'algorithme 2, écrire un algorithme `Dist` qui, étant donné un graphe G et un sommet de départ s, permet de calculer et de renvoyer les distances entre s et tous les autres sommets de G.

Éléments de correction :

Algorithme 3 : DistBFS : Calcul des distances à un sommet donné dans un graphe connexe.

Entrée : G : un graphe
Entrée : s : identifiant du sommet de départ
Sortie : D : Dictionnaire mémorisant la distance de s aux sommets du graphe

```
1  D = DictionnaireVide()
2  F = FileVide()
3  Enfiler(F,s)
4  D[s]=0
5  Marquer(s)
6  Tant que F non vide faire
7      x=Defiler(F)
8      Pour y voisin de x dans G faire
9          Si y non marqué alors
10             Enfiler(F,y)
11             Marquer(y)
12             D[y] = D[x]+1;
13         Fin
14     Fin
15 Fin
16 return D
```

Question 5.6

En déduire un algorithme `SommetProxMax` qui, étant donné un graphe G, renvoie un sommet de centralité de proximité maximale dans G.

Éléments de correction :

Algorithme 4 : Calcul d'un sommet de proximité maximale dans un graphe non vide connexe

Entrée : G = (V,E) : un graphe
Sortie : s : l'identifiant du sommet de centralité de proximité maximale

```
1  d = −1
2  Pour x ∈ V faire
3      D = DistBFS(G,x)
4      sdist = 0
5      Pour y ∈ V faire
6          sdist = sdist + D[y]
7      Fin
8      Si sdist == 0 alors
9          return G[x]
10     Fin
11     Si 1/sdist > d alors
12         s = x
13         d = 1/sdist
14     Fin
15 Fin
16 return s
```

Question 5.7

Que peut-on dire de l'intérêt des deux métriques proposées dans le contexte de la propagation de proche en proche d'une épidémie ? L'une des métriques semble-t-elle plus pertinente que l'autre pour identifier les individus cruciaux dans la dynamique de propagation ? Pourquoi ?

Éléments de correction :

Les deux métriques tentent de mesurer l'importance (la centralité) d'un sommet dans un graphe. Dans le contexte d'une dynamique de propagation de proche en proche (d'un virus, d'une information, ...), le degré mesure la capacité d'un sommet à toucher immédiatement beaucoup d'autres sommets mais ne dit rien de la propagation sur un horizon plus lointain. La mesure de centralité de proximité permet de son côté de mesurer à quel point il existe des chemins courts partant d'un sommet vers tous les autres.
Une propagation partant d'un sommet ayant une forte centralité de proximité atteindra donc plus rapidement l'ensemble des nœuds du graphe. Dans le présent contexte, elle semble préférable à celle du degré pour identifer les individus qui risquent, par les chaines de transmission, de contaminer rapidement le plus de monde.

Exercice 6 : Protocole ROBERT

Le principal problème qu'on retrouve dans l'algorithme HaMagen est que les données collectées sur les personnes atteintes de la Covid19 peuvent faire fuiter des données privées, *i.e.* leur position à une époque donnéee. Afin de ne pas collecter des données aussi précises que la position GPS, d'autres algorithmes respectant le RGPD ont été proposés, notamment par un consortium d'industriels (Apple et Google), mais aussi par des équipes de recherche (avec le protocole ROBERT). Ces deux protocoles (celui proposé par des industriels et le protocole ROBERT) n'utilisent pas la position GPS des individus, mais la technologie de communication *Bluetooth*, qui va permettre de détecter d'autres appareils à proximité, sans pour autant connaître la position où ils se trouvent.

Question 6.1

Qu'est-ce que le RGPD et quel est le principe appliqué ici ?

Éléments de correction :

RGPD est le règlement général sur la protection des données. C'est une "loi" européenne protégeant les données personnelles des personnes en Europe. Le principe est d'avoir une collecte limitée de données, c'est-à-dire de réduire les données collectées à seulement ce qui est strictement nécessaire. On a seulement besoin de savoir qui on a croisé : il faut donc conserver des informations sur les personnes croisées, et non des informations de géolocalisation, même si celles-ci permettent de calculer l'information nécessaire.

Protocole ROBERT simplifié

1. Un utilisateur u s'inscrit au protocole, en contactant l'IC. L'IC génère un identifiant unique ID_u pour l'utilisateur u et lui communique cet identifiant. L'IC génère également une clé symétrique SK_u et envoie SK_u à l'utilisateur u. Pour simplifier, on considèrera que SK_u permet à la fois de chiffrer et d'authentifier les messages entre l'IC et l'utilisateur u. L'application de l'utilisateur u conserve au secret la clé SK_u. L'IC connaît également une clé secrète K_S.
2. Pour chaque époque i, l'IC calcule un identifiant dit "éphémère" déduit de ID_u par i applications d'une fonction Φ :
$$EphID_i(u) = \Phi^i(ID_u \ \oplus \ K_S)$$
$\oplus$ étant l'opérateur logique XOR.
La fonction Φ est une fonction *de hachage cryptographique* à valeurs dans un ensemble de taille 2^{64}, et utilisant une clé secrète K_S de même longueur que ID_u. Ces identifiants sont communiqués par groupe de d identifiants (par exemple une fois par jour l'IC envoie à chaque utilisateur $d = 96$ identifiants à utiliser pendant la journée correspondant aux identifiants éphémères qui seraient calculés aux 96 époques de la journée). L'envoi de ces identifiants est chiffré par le serveur avec la clé SK_u.
3. Entre chaque époque i et chaque époque $i + 1$, le téléphone de l'utilisateur u émet régulièrement (par exemple chaque seconde) $EphID_i(u)$ via la technologie de communication Bluetooth.
4. Chaque téléphone stocke l'ensemble des $EphID_i$ distincts qu'il capte à proximité via Bluetooth pour chaque époque i.
5. Si jamais l'utilisateur v est diagnostiqué positif à la Covid19, alors le téléphone de l'utilisateur v envoie à l'IC un message incluant l'ensemble ϵ_v contenant tous les $EphID$ qu'il a reçus et les époques associées au cours des $Cont = 14$ derniers jours. L'infrastructure centralisatrice est alors capable de retrouver l'ensemble des utilisateurs qui ont été exposés, en retrouvant les ID_u à partir des listes envoyées par les individus ayant été testés positifs à la Covid19.

6. Régulièrement (par exemple une fois par jour), le téléphone de chaque utilisateur se connecte et demande s'il a été identifié parmi la liste des contacts possibles. Si c'est le cas, l'IC l'en informe, et l'utilisateur est invité à se faire tester.

On rappelle qu'une fonction de hachage est une fonction dont le code est public et qui est à valeurs dans un ensemble fini de taille Ω (par exemple $\Omega = 2^{64}$). Comme il faut utiliser le résultat de l'application de Φ comme paramètre d'entrée de Φ, les ID_u peuvent donc être codés sur $\log_2(\Omega)$ bits au plus. On fait également ici l'hypothèse que Φ est bijective sur Ω.

Question 6.2

Comme la fonction Φ est publique et que l'utilisateur connait son ID_u, est-ce qu'un utilisateur u est capable de calculer $EphID_i(u)$ étant donné i ?

Éléments de correction :

Non, car $EphID_i(u)$ est calculé en utilisant un secret connu uniquement par le serveur : K_S

Question 6.3

On note n le nombre d'utilisateurs du système de traçage ROBERT. Donner, en fonction de n, Ω et du nombre d'époques qui se sont écoulées (qu'on notera $\mathscr{E}$), la probabilité P_{dist} de ne générer que des valeurs distinctes pour les identifiants éphémères des n utilisateurs pour les $\mathscr{E}$ applications successives de Φ.

Éléments de correction :

Les données sont les suivantes : on a n personnes et le domaine et le co-domaine de Φ est de taille Ω. On s'intéresse à la probabilité de ne pas tirer deux fois la même valeur au bout de $\mathscr{E}$ époques : d'une part il faut que tous les ID_u soient distincts, puis à chaque fois qu'on applique Φ à un ID_u ou au résultat de ϕ^{i-1} il faut qu'on produise une valeur différente. Ce problème s'apparente à un tirage avec remise : les événements (déterminations des identifiants éphémères) sont donc indépendants.
Considérons l'époque 0. Le premier identifiant (éphémère) choisi pour un utilisateur est forcément unique. Le deuxième identifiant (éphémère) choisi pour un 2e utilisateur sera différent du premier avec une probabilité de $1 \times (1 - \frac{1}{\Omega})$. Le troisième identifiant (éphémère) choisi pour un 3e utilisateur sera différent des deux premiers (eux-mêmes différents) avec une probabilité de $1 \times (1 - \frac{1}{\Omega}) \times (1 - \frac{2}{\Omega})$. Etc. Si on a n identifiants, la probabilité est

$$P_{dist} = \Pi_{k=0}^{n-1}(1 - \frac{k}{\Omega})$$

Augmenter le nombre d'époques revient simplement à augmenter le nombre d'événements. Ainsi avec $\mathscr{E}$ époques, la formule devient :

$$P_{dist} = \Pi_{k=0}^{\mathscr{E}.n-1}(1 - \frac{k}{\Omega})$$

Question 6.4

Si on se donne $n = 2$ et $\Omega = 2^{10}$, $P_{dist} \approx 0.994$ pour $\mathscr{E} = 2$ et $P_{dist} \approx 0.985$ pour $\mathscr{E} = 3$. Que pouvez-vous en déduire ? Justifier l'intérêt de ce calcul de probabilité.

Éléments de correction :

On voit qu'avec ce scénario (défini par n et Ω), le système est un peu moins fiable avec 3 époques qu'avec 2. Pour augmenter la probabilité de ne pas avoir de collision sur les identifiants éphémères, il faudrait augmenter la taille d'Ω qui est le seul paramètre sur lequel on peut jouer.
Ce calcul de probabilité peut servir à vérifier que notre système est correctement dimensionné correctement, à savoir qu'il va générer très peu de collisions sur les identifiants éphémères.

Question 6.5

On fait l'hypothèse que w_1 et w_2 ont croisé au même moment une personne contaminée (utilisateur v). Est-ce qu'il est possible pour l'IC de savoir que w_1 et w_2 ont été en contact ? Est-il possible pour l'IC de savoir que w_1, w_2 et v ont été en contact ?

Éléments de correction :

L'IC peut calculer, pour l'ensemble des ID_u, les $EphID$ correspondant aux époques i et de retrouver les ID_u présents dans la liste envoyée par un utilisateur v testé positif à la Covid19. Puisque la liste est envoyée en une seule fois par cet utilisateur v, alors le serveur est capable de lier tous les w. L'IC ne peut néanmoins pas dire avec certitude que w_1 et w_2 ont été en contact car les données remontées à une époque sont une agrégation d'informations collectées via Bluetooth qui peuvent être récupérées à des fréquences plus élevées (que la fréquence des époques). Comme nous ne connaissons pas la mobilité des individus, il est difficile d'inférer la distance séparant w_1 et w_2 au cours de cette période. Néanmoins si l'IC co-localise w_1 et w_2 sur plusieurs époques consécutives, alors l'IC peut supposer que w_1 et w_2 se connaissent.

L'IC n'est a priori pas capable de lier v à tous ces w sauf s'il est capable d'obtenir l'adresse IP qui lui a envoyé la liste. Il pourra lier ces w à cette adresse IP. Même si l'adresse IP ne peut pas être récupérée, on peut aussi noter qu'il est potentiellement possible pour l'IC de trouver v, si jamais l'un de ses contacts, par exemple w_1, a été contaminé. En effet, si on suppose N individus en contact, tous les individus positifs vont envoyer un ensemble de $N-1$ individus où sont présents toutes les personnes sauf la personne envoyant les alertes. Il est donc assez facile pour l'IC de retrouver l'ensemble des N personnes.

Question 6.6

Le protocole ROBERT complet impose des contraintes supplémentaires lors du téléversement des données par un utilisateur sur l'IC :

1. la liste ϵ_v n'est pas envoyée en une seule fois, mais chaque $EphID$ de la liste ϵ_v, avec l'époque associée, est envoyé par un message indépendant $m_{v,j}$ (pour $j \in [1; |\epsilon_v|]$) ;
2. chaque message $m_{v,j}$ est envoyé via un *mixnet*.

Un *mixnet* est une structure d'anonymisation qui s'intercale entre un expéditeur et un récepteur et qui ne permet pas au récepteur de connaitre l'adresse IP de l'expéditeur. D'autre part, un *mixnet* n'envoie pas forcément tous les messages dès qu'il les reçoit. Par exemple, un *mixnet* peut attendre avant d'envoyer un message, ou encore inverser l'ordre d'envoi des messages provenant d'utilisateurs différents ou du même utilisateur.

Expliquer comment ces deux contraintes supplémentaires participent à la sécurité du protocole ROBERT.

Éléments de correction :

Le fait de casser la liste en plusieurs parties répond au problème de la question précédente, c'est-à-dire de ne pas savoir que deux individus, qui ont été en contact avec une personne détectée positive, ont eux-même été en contact. Toutefois, si on n'utilise pas un mixnet, le serveur pourrait reconstruire la liste en utilisant l'adresse IP de l'expéditeur. De plus même si l'adresse IP de l'expéditeur était anonymisée, le serveur peut reconstruire la liste sur la base d'hypothèses de corrélations temporelles (par exemple en considérant que tous les messages reçus dans la même seconde proviennent du même expéditeur). L'utilisation du mixnet est donc très utile.